# Projection sur un convexe fermé et théorème de Riesz

Soit $H$ un espace de Hilbert. Soit $K$ un convexe fermé non vide de $H$.

**Théorème 1.** *Pour tout $f \in H$, il existe un unique élément de $K$, noté $P_K(f)$, et appelé projection de $f$ sur $K$, tel que :*

$$\|P_K(f) - f\| = \inf_{v \in K} \|v - f\|$$

*De plus, $P_K(f)$ est caractérisée par :*

$$\forall v \in K,\ \langle f - P_K(f), v - P_K(f)\rangle \leqslant 0$$

*Démonstration.*

**Étape 1 : Existence**

Soit $u_\varepsilon$ une suite minimisante pour le problème de minimisation associé :

$$m = \inf_{v \in K} \|v - f\| \leqslant \|u_\varepsilon - f\| < m + \varepsilon$$

On utilise l'identité du parallélogramme pour $f - u_\varepsilon$ et $f - u_{\varepsilon'}$ :

$$2\|f - u_\varepsilon\|^2 + 2\|f - u_{\varepsilon'}\|^2 = 4\left\|f - \frac{u_\varepsilon + u_{\varepsilon'}}{2}\right\|^2 + \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}\|^2$$

Comme $K$ est convexe, l'isobarycentre de $u_\varepsilon$ et $u_{\varepsilon'}$ est dans $K$. Alors :

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}\|^2 \leqslant 2(m+\varepsilon)^2 + 2(m+\varepsilon')^2 - 4m^2 = 4m(\varepsilon + \varepsilon') + 2(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2)$$

La suite $u_\varepsilon$ est donc de Cauchy dans $H$, donc converge dans $H$. De plus $K$ est fermé, la limite est donc dans $K$.

**Étape 2 : Unicité**

Soient $u, v \in K$ vérifiant l'égalité voulue. On utilise l'identité du parallélogramme pour $f - u$ et $f - v$ :

$$2\|f - u\|^2 + 2\|f - v\|^2 = 4\left\|f - \frac{u+v}{2}\right\|^2 + \|u - v\|^2$$

Il vient alors que $\|u - v\|^2 \leqslant 2m^2 + 2m^2 - 4m^2 = 0$, d'où l'unicité.

**Étape 3 : Caractérisation**

Soient $v \in K$ et $t \in ]0,1]$. Alors $P_K(f) + t(v - P_K(f)) \in K$ car $K$ est convexe, et :

$$\begin{aligned}\|f - P_K(f)\|^2 &\leqslant \|f - P_K(f) - t(v - P_K(f))\|^2 \\ &\leqslant \|f - P_K(f)\|^2 + t^2\|v - P_K(f)\|^2 - 2t\langle f - P_K(f), v - P_K(f)\rangle\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$0 \leqslant -2t\langle f - u, v - P_K(f)\rangle + t^2\|v - P_K(f)\|^2 \quad \text{puis} \quad \langle f - P_K(f), v - P_K(f)\rangle \leqslant \frac{t}{2}\|v - P_K(f)\|^2$$

On obtient l'égalité voulue en faisant tendre $t$ vers 0.

Réciproquement, soit $u$ dans $K$ vérifiant l'égalité, alors, pour tout $v \in K$, on a :

$$\|f - v\|^2 = \|f - u + u - v\|^2 = \|f - u\|^2 + \|u - v\|^2 + 2\langle f - u, u - v\rangle \geqslant \|f - u\|^2$$

Par définition de la projection sur un convexe fermé, on a donc $u = P_K(f)$. □

**Corollaire 2.** *Soient $M$ un sous-espace vectoriel fermé de $H$ et $f \in H$. Alors $P_M(f)$ est caractérisé par :*

$$P_M(f) \in M \qquad \text{et} \qquad \forall\, v \in M,\ \langle f - P_M(f), v\rangle = 0$$

*De plus, $P_M$ est un opérateur linéaire.*

*Démonstration.*

Par définition de la projection sur un convexe fermé, on a, pour tout $v \in M$ et tout $t \in \mathbb{R}$ :

$$\langle f - P_M(f), tv - P_M(f)\rangle \leqslant 0$$

Or, faire tendre $t$ vers $+\infty$ implique une contradiction si $\langle f - P_M(f), v\rangle \neq 0$. Donc $\langle f - P_M(f), v\rangle = 0$.

Inversement, si $u$ vérifie la caractérisation voulue, l'appliquer avec $v - u \in M$, où $v \in M$, donne que $u = P_M(f)$ par la caractérisation de $P_M(f)$.

□

**Théorème 3** (Riesz-Fréchet)**.** *Soit $\varphi \in H'$. Alors il existe un unique $f \in H$ tel que :*

$$\forall\, v \in H,\ \langle \varphi, v\rangle = \langle f, v\rangle$$

*Démonstration.*

Remarquons d'abord que si $\varphi = 0$, alors prendre $f = 0$ convient.

Supposons que $\varphi \neq 0$. Soit $M = \operatorname{Ker}\varphi$, un sous-espace vectoriel fermé de $H$.
Comme $\varphi \neq 0$, alors $M \neq H$. Soit alors $g_0 \in H \setminus M$, et soit $g_1 = P_M(g_0)$. Posons maintenant $g = \frac{g_0 - g_1}{\|g_0 - g_1\|}$.
Pour tout $v \in H$, on pose :

$$\lambda = \frac{\langle \varphi, v\rangle}{\langle \varphi, g\rangle} \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad w = v - \lambda g \in M$$

Il vient alors que $\langle g, w\rangle = \frac{\langle g_0 - g_1, w\rangle}{\|g_0 - g_1\|} = 0$ par le Corollaire 2, donc que :

$$\langle g, v\rangle = \langle g, w + \lambda g\rangle = \langle g, w\rangle + \lambda \langle g, g\rangle = \lambda$$

En posant $f = \langle \varphi, g\rangle\, g$, on a ainsi :

$$\langle \varphi, v\rangle = \frac{\langle \varphi, v\rangle}{\langle \varphi, g\rangle} \langle \varphi, g\rangle = \langle g, v\rangle \langle \varphi, g\rangle = \langle \langle \varphi, g\rangle\, g, v\rangle = \langle f, v\rangle$$

□

# Références

[Bre87] H. Brezis. *Analyse fonctionelle.* Masson